

Mai 1975

LRP 91/75

LE SCREW PINCH SIMULE PAR UNE CORDE  
ELASTIQUE EN TRANSLATION

R. Keller, W. Bachmann, A. Pochelon

Centre de Recherches en Physique des Plasmas

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE



Mai 1975

LRP 91/75

LE SCREW PINCH SIMULE PAR UNE CORDE  
ELASTIQUE EN TRANSLATION

R. Keller, W. Bachmann, A. Pochelon

ABSTRACT

The  $m = 1$  mode of a plasma column is represented by means of a mechanical set up which shows the helical shape displayed by a linear screw pinch with fixed axial boundaries.

## I. INTRODUCTION

Le mouvement d'une colonne de plasma confinée par un champ magnétique a été étudié à maintes reprises à l'aide de la MHD idéalisée. (Voir liste de références dans [1,2,3]). On considère un plasma cylindrique sans résistivité, dont les profils de densité et de courant sont diffus. Le résultat révèle un grand nombre de modes possibles, obéissant à des relations de dispersion distinctes, ou couvrant un spectre continu. Parmi ces modes se détache le kink dont la relation de dispersion exacte est très similaire à celle obtenue par une théorie beaucoup plus simple, analytique, appliquée à un profil de densité rectangulaire et un courant de surface [4,5,6]. Le mode  $m = 1$  est aussi le plus instable, c'est pourquoi on y porte le plus d'attention, tant expérimentalement que théoriquement. Il se trouve pourtant que le problème des conditions aux limites n'a jamais été exposé clairement dans le cas d'un screw pinch amarré, c'est-à-dire fixé aux électrodes.

Le but de ce travail est de visualiser le mode  $m = 1$  à l'aide d'un montage mécanique, la corde élastique en translation, et de montrer de façon tangible les conditions régnant aux points d'amarrage.

## II. DEFINITION DES GRANDEURS

La déformation de la surface d'un screw pinch de profil rectangulaire est décomposable en une série de modes normaux

$$r_p = a + \sum_{n,m} \xi_{n,m} \quad (1)$$

avec

$$\xi_{n,m} = \gamma_{n,m} e^{i(m\theta + h_n z - \omega_{n,m} t)} \quad (2)$$

On ne considère ici que le mode  $m = 1$ . Pour  $y_n \ll a$  la déformation se résume en un déplacement latéral en bloc, la colonne de plasma gardant sa section circulaire de rayon  $a$ . Il suffit alors de considérer uniquement le mouvement de son axe:

$$y_n = \gamma_n e^{i(-h_n z + \omega_n t)} \quad (3)$$

On donne à l'exponentielle une signification vectorielle:  $-h_n z + \omega_n t$  est l'azimut du déplacement  $y_n$ . L'expression ci-dessus représente donc une hélice tournant avec la fréquence angulaire  $+\omega_n$ . L'hélice est gauche si  $h_n$  est positif, et droite si  $h_n$  est négatif. Elle se déplace avec la vitesse de propagation  $v_n = \omega_n / h_n$ . L'expression (3) est une onde polarisée circulairement. Elle obéit à une relation de dispersion, dont la forme approximée pour de grandes longueurs d'ondes est très simple:

$$\omega^2 = \Omega^2 q [(2-\beta)q - 2] \quad (4)$$

avec

$$\Omega = \frac{v_A}{\alpha a} \quad v_A = \frac{B_z}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad \alpha = \frac{B_z}{B_\theta} \quad (5)$$

$q$  désigne le facteur de sécurité qu'il est convenu d'écrire comme suit:

$$q = -\alpha h a \quad (6)$$

Le dernier terme du membre de droite de (4) est un terme dispersif. En son absence  $\omega$  serait proportionnel à  $q$ , la vitesse de propagation serait indépendante de la longueur d'onde. D'après (4) la vitesse de phase est

$$v = \frac{\omega}{h} = -v_A \sqrt{(2-\beta) - \frac{2}{q}} \quad (7)$$

et la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial h} = -\frac{v_A \Omega}{\omega} \left[ (2-\beta) q - 1 \right] \quad (8)$$

Il existe une limite inférieure pour  $q$  au-dessous de laquelle  $\omega$  devient imaginaire: c'est la limite de Kruskal-Shafranov. La condition de stabilité de la colonne de plasma s'écrit donc

$$q \geq \frac{2}{2-\beta} \quad (9)$$

A la limite de K-S la vitesse de phase s'annule et la vitesse de groupe tend vers l'infini. A cette limite, le rapport maximum des champs magnétiques est

$$\left( \frac{B_\theta}{B_z} \right)_{max} = \frac{|h/a|}{2} (2-\beta) \quad (10)$$

### III. LE SCREW PINCH FIXE AUX EXTREMITES

L'expérience montre que la colonne de plasma est fixée aux extrémités, à l'endroit des électrodes. Un seul mode ne suffit donc pas pour décrire une telle situation. Par contre, avec une superposition de deux hélices de même amplitude et de pas différent, il se forme des noeuds à intervalles réguliers. En plaçant deux noeuds aux extrémités, on impose les

conditions aux limites voulues. De plus, la résultante des amplitudes aux extrémités doit rester nulle en tout temps, donc la fréquence des deux ondes doit être la même.

Une troisième condition nous est fournie par des considérations énergétiques. L'énergie d'une onde se propage à la vitesse de groupe. Or, dans un mouvement stationnaire, il ne peut y avoir de propagation d'énergie, ce qui impose une vitesse de groupe égale et de sens contraire pour les deux ondes. (Les ondes possèdent la même densité d'énergie si leur fréquence et leur amplitudes sont pareilles). Ceci dit, le mouvement est constitué de deux modes (3) superposés

$$\eta = \gamma e^{i(-h_1 z + \omega t)} + \gamma e^{i(-h_2 z + \omega t)} \quad (11)$$

D'après (8) on doit avoir

$$(2-\beta)q_1 - 1 = - \left[ (2-\beta)q_2 - 1 \right] \quad (12)$$

Les quantités  $q_1$  et  $q_2$  sont donc symétriques envers une valeur centrale

$$q_c = \frac{1}{2-\beta} \quad (13)$$

Ainsi l'on peut écrire

$$q_1 = q_c + \Delta q \quad \text{et} \quad q_2 = q_c - \Delta q \quad (14)$$

La fréquence et les vitesses de groupe deviennent

$$\omega^2 = q_c \Omega^2 \left[ \frac{\Delta q^2}{q_c^2} - 1 \right] \quad (15)$$

$$v_{g1} = - \frac{v_A \Omega}{\omega} \cdot \frac{\Delta q}{q_c} \quad \text{et} \quad v_{g2} = + \frac{v_A \Omega}{\omega} \cdot \frac{\Delta q}{q_c} \quad (16)$$

Après substitution des nombres d'ondes  $-h_1 = q_1/\alpha a$  et  $-h_2 = q_2/\alpha a$  dans (11), le déplacement de la colonne s'écrit

$$\eta = 2 \gamma e^{i\left(\frac{q_c z}{\alpha a} + \omega t\right)} \cos \frac{\Delta q z}{\alpha a} \quad (17)$$

Ainsi la colonne prend la forme d'une sinusoïde inscrite sur une surface hélicoïdale. Les conditions aux limites imposent la relation entre  $\Delta q$  et  $\alpha$ , soit

$$\frac{\Delta q l}{\alpha a} = \pi \quad (18)$$

(On ne considère pas les harmoniques). La grandeur  $q_c/\alpha a$  désigne l'hélicité dénommée  $h_o$ . L'expression (17) devient

$$\eta = 2 \gamma e^{i(h_o z + \omega t)} \cos \frac{\pi z}{l} \quad (19)$$

En pensant à (18) l'hélicité est

$$h_o = \frac{\pi q_c}{l \Delta q} \quad (20)$$

Elle est positive, l'hélice est droite.

L'expression (15) nous révèle une nouvelle condition de stabilité

$$\Delta q \geq \frac{1}{2 - \beta} \quad (21)$$



La limite de Kruskal pour un pinch fixé aux extrémités est maintenant  $\Delta q = 1/(2 - \beta)$ . D'après (18), le rapport maximum des champs magnétiques vers cette limite devient

$$\left(\frac{B_\theta}{B_z}\right)_{max} = \frac{\pi a}{l}(2 - \beta) \quad (22)$$

Par analogie avec (10) on voit que la longueur  $l$  du pinch fixé correspond à la demi-longueur d'onde d'un pinch libre (ou à la demi-circonférence d'un pinch toroïdal).

La longueur d'onde des deux modes s'obtient d'après (6), (13) et (14):

$$\lambda_1 = \frac{2l}{1 + \frac{q_c}{\Delta q}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{2l}{1 - \frac{q_c}{\Delta q}} \quad (23)$$

Ceci fait, à la limite de stabilité,  $\lambda_1 = l$  et  $\lambda_2 = \infty$ .

Le mouvement décrit jusqu'ici représente un pinch tournant avec la fréquence angulaire  $\omega$ . Le sens de rotation ne joue pas de rôle; une solution plus générale est la superposition de deux mouvements rotatoires dans le sens opposé. Ce dernier devient purement oscillatoire si les deux amplitudes sont égales.

#### IV. LA CORDE ELASTIQUE EN TRANSLATION

Si l'on imprime une perturbation rotatoire, une onde polarisée circulairement se propage le long d'une corde élastique tendue. L'expression mathématique du mouvement est identique à l'une des composantes de l'ex-

pression (11). Pour obtenir l'analogie au mouvement du screw pinch amarré, il est nécessaire d'exciter deux ondes de polarisation circulaire se propageant en sens contraire à des vitesses différentes. La différence des vitesses est réalisable en entraînant la corde dans un mouvement de translation. On crée ainsi un effet Doppler. Le screw pinch peut être visualisé au moyen du montage mécanique suivant:

Une corde élastique sans fin, guidée par deux filières, est mise en mouvement de translation par un système de poulies. Une troisième filière excentrique, dont l'axe de rotation est aligné sur les deux premières, entraîne la corde dans un mouvement de rotation. Par un éclairage stroboscopique on pourra voir en perspective la forme semi-hélicoïdale gouvernée par l'équation (19).

Dans le système du laboratoire, la vitesse de phase  $\omega/h$  des deux ondes est égale à:

$$v_1 = - \frac{\omega l}{\pi \left(1 + \frac{q_c}{\Delta q}\right)} \quad v_2 = + \frac{\omega l}{\pi \left(1 - \frac{q_c}{\Delta q}\right)} \quad (24)$$

Dans le système de coordonnées de la corde, les deux vitesses sont égales en grandeur. La vitesse de translation  $w$  produisant cette situation est égale, selon la théorie de l'effet Doppler, à la moyenne arithmétique de  $v_1$  et  $v_2$ , soit:

$$w = \frac{\omega l q_c / \Delta q}{\pi \left(1 - \frac{q_c^2}{\Delta q^2}\right)} \quad (25)$$

La vitesse de propagation dans le système de la corde  $u = v_2 - w$  est alors

$$u = \frac{\omega l}{\pi \left(1 - \frac{q_c^2}{\Delta q^2}\right)} \quad (26)$$

Cette dernière est déterminée par la tension de la corde. Pour les besoins de notre démonstration mécanique, la valeur de  $u$  est sans importance, il suffit de représenter (24) et (25) relatif à  $u$ , soit

$$v_1 = -u \left(1 - \frac{q_c}{\Delta q}\right) \quad v_2 = u \left(1 + \frac{q_c}{\Delta q}\right) \quad w = u \frac{q_c}{\Delta q} \quad (27)$$

Il est alors nécessaire d'ajuster la fréquence de rotation à la valeur

$$\omega = \frac{\pi u}{l} \left(1 - \frac{w^2}{u^2}\right) \quad (28)$$

A la limite de Kruskal,  $q_c / \Delta q = 1$  la vitesse de translation  $w$  devient égale à la vitesse de propagation relative à la corde  $u$ . De plus,  $\omega$  s'annule et (19) devient

$$\eta = 2\gamma e^{i \frac{\pi z}{l}} \cos \frac{\pi z}{l} \quad (29)$$

Le temps n'intervient plus: la déformation de la corde reste fixe dans l'espace. On répète dans ce cas, une expérience de cours bien connue.

Les photographies stroboscopiques ci-dessous montrent le modèle mécanique en fonctionnement. La longueur du "pinch" est de 60 cm. La Figure 1 montre le mode fondamental, et dans la Figure 2 l'harmonique  $n = 2$  est excitée. Vue de l'observateur, la corde tourne dans le sens positif, c'est-à-dire contraire aux aiguilles d'une montre, à raison de 3, respectivement 6 tours par sec. Elle recule vers l'observateur avec une vitesse d'environ 10 m/sec. L'onde progresse dans le sens contraire à la translation, quelque soit le sens de rotation. Comme la vitesse de translation choisie est négative, l'hélice est gauche, à l'inverse de ce qui a été admis dans le texte.

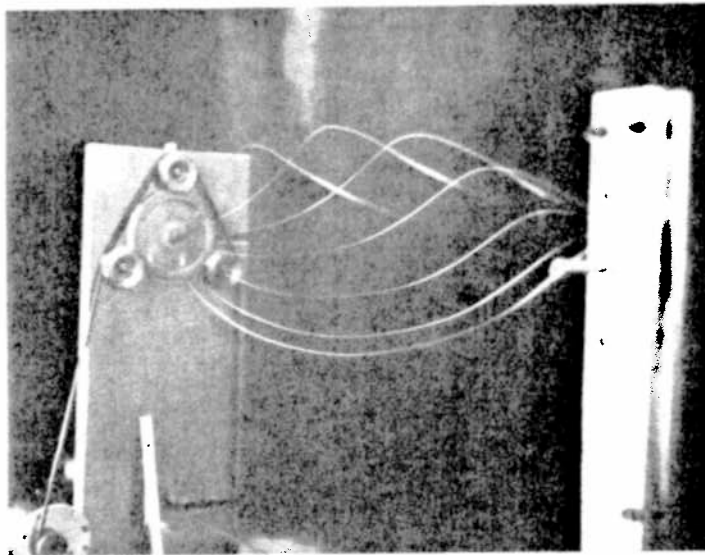


Fig. 1 Mode fondamental  $n = 1$

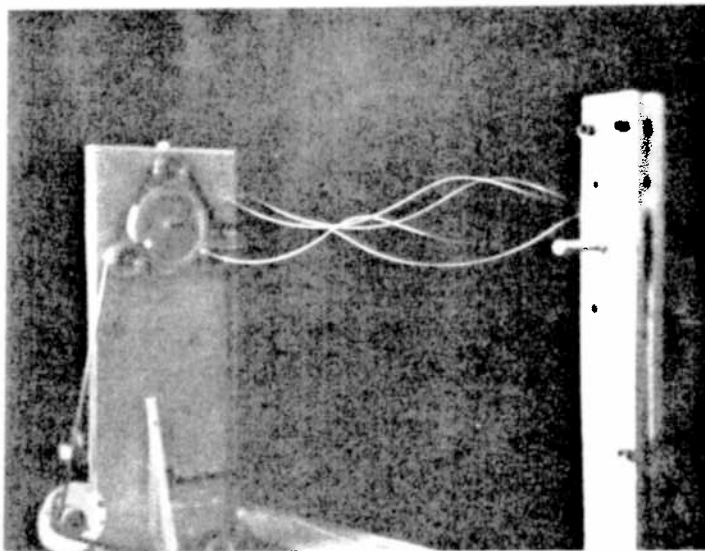


Fig. 2 Première harmonique  $n = 2$

# REFERENCES

- [1] J. Tataronis, W. Grossmann. Decay of MHD Waves by Phase Mixing,  
part I, Z.Physik 261, 203 (1973),  
Part II, Z.Physik 261, 217 (1973)
- [2] K. Appert, D. Berger, R. Gruber, F. Troyon, K.V. Roberts  
THALIA, LRP 87/74 (1974), Lausanne
- [3] K. Appert, D. Berger, R. Gruber, F. Troyon, J. Rappaz  
Studium der Eigenschwingungen eines zylindrischen Plasmas mit der  
Methode der finiten Elemente. ZAMP, Vol. 25, 229 (1974)
- [4] R.J. Tayler. The influence of an axial magnetic field on the  
stability of a constricted gas discharge. Proc.Phys.Soc. (London)  
B70, 1049 (1957)
- [5] B.B. Kadomtsev. Hydromagnetic stability of a plasma.  
Review of Plasma Physics, M.A. Leontovich, Vol. 2, 153 (1966)
- [6] R. Keller. Le mécanisme du pinch hélicoïdal stabilisé par  
rétroaction. LRP 58/72 (1972), Lausanne.